

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \frac{1}{2} C (x^2 + y^2)$$

1. Calculer l'énergie moyenne de ce système.
2. Calculer l'énergie moyenne d'une particule selon les trois directions x, y et z .

Exercice 25

Calculer l'énergie moyenne d'un électron libre à 300 K confiné dans une parallélépipède dont les côtés sont a, b et c dans les cas suivants :

1. $a = b = c = 1 \mu\text{m}$
2. $a = b = 1 \mu\text{m}$ et $c = 1 \text{ nm}$
3. $a = 1 \mu\text{m}$ et $b = c = 1 \text{ nm}$

On donne $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ et $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ Js}$

Exercice 26

Calculer, à 300K, la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ d'un gaz parfait constitué de molécules d'azote (N_2 , masse molaire 28g).

5. Probabilités

Exercice 27

On considère un couple où l'homme et la femme sont tous les deux âgés de 70 ans. On suppose que la probabilité pour qu'au bout de 10 ans l'homme soit toujours en vie est de $\frac{1}{3}$ et alors qu'elle est de $\frac{1}{2}$ pour la femme.

- 1 Quelle est la probabilité pour que le couple soit toujours vivant à 80 ans ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un d'entre eux atteigne 80 ans ?
3. Quelle est la probabilité pour que le couple ait disparu dans 10 ans ? Faire le calcul avec 2 méthodes différentes.
4. Quelle est la probabilité pour que l'homme soit le seul survivant dans 10 ans ? Même question pour la femme.

Exercice 28

On lance deux dés non truqués, l'un rouge et l'autre bleu. On s'intéresse à la somme des nombres obtenus sur chacune des faces.

1. Quel est l'ensemble des valeurs obtenues et combien y a-t-il de possibilités lorsqu'on lance les deux dés ?
2. Quelle est distribution de probabilité ?
3. Si l'on devait parier sur une somme. Quelle est celle que l'on aurait intérêt à choisir ?

Exercice 29

On tire successivement deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un cœur à chaque tirage.

Exercice 30

Pour se connecter la première fois à un site Web, on demande de définir un code de 4 chiffres qui doivent tous être différents. Les chiffres possibles vont de 0 à 9.

1. Combien peut-on former de codes à 4 chiffres ?
2. Combien de codes correspondent à un nombre inférieur à 500 ?
3. Combien y a-t-il de codes pairs et impairs ?
4. Combien de codes sont divisibles par 5 ?
- 5 Combien y a-t-il de codes si on lève la contrainte de chiffres différents et que l'on peut utiliser tous les chiffres plusieurs fois ?

Exercice 31

On considère une boîte contenant 6 boules blanches identiques et 7 boules noires identiques. On se propose de tirer 5 boules au hasard.

1. Combien de manières peut-on tirer 5 boules de cette boîte, quelle que soit la couleur ?
2. Combien de manières peut-on tirer 3 blanches et 2 noires ?
3. Combien de manière peut-on tirer 5 boules de la même couleur ?

Exercice 32

On considère deux fabricants de batteries Li-Ion A et B . Le premier, A , possède 30% du marché. Au bout d'un an, 10% des batteries en provenance de A ne fonctionnent plus. C'est aussi le cas pour 30% de celles provenant de B .

1. On considère une batterie dont on ne connaît pas l'origine qui ne fonctionne plus au bout d'un an. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de B ?
2. Exprimer cela sous forme d'une probabilité conditionnelle.

Exercice 33

On constate que 90% des voitures qui ne peuvent pas dépasser 100 000 km ont eu une panne sérieuse lors des premiers 3 000 km. Mais 20% des voitures vont au-delà de 100 000 km bien qu'elles aient eu une panne sérieuse lors des 3 000 premiers km. Sachant qu'il y a 2% des voitures qui ne peuvent aller au-delà de 100 000 km, calculer la probabilité pour qu'une voiture ne puisse dépasser 100 000 km s'il elle a eu une panne avant 3 000 km ?

Exercice 34

Monsieur Durand passe un test de dépistage d'une maladie rare qui touche 0,1% de la population. Son médecin lui dit qu'il est positif et que ce test est fiable à 95%. Toutefois, ce test donne parfois un résultat positif alors que le patient n'a rien (faux positif). Le laboratoire indique que le nombre de cas négatifs obtenus avec ce test sur une personne saine est de 98%. Donc il y peut y avoir à la fois des faux positifs et des faux négatifs. Quelle est la probabilité pour que Monsieur Durand soit atteint de cette pathologie rare ?

Exercice 35

Vous allez à une soirée où vous avez des chances de rencontrer deux de vos amis : Jean et Pierre. Plus précisément, vous avez 60% de rencontrer Jean et 40% Pierre. De plus la chance de rencontrer Pierre quand Jean est aussi à la soirée est de 50%.

1. Quelle est la probabilité de rencontrer au moins un de vos deux amis ?
2. Quelle est la probabilité de rencontrer les deux au cours de cette soirée ?
3. Quelle est la probabilité de rencontrer Jean alors que Pierre est aussi là ?

Exercice 36

Un couple a deux enfants. L'un d'entre eux est une fille. Quelle est la probabilité pour que le second soit un garçon ?

Pour un couple qui a deux enfants, quelle est la probabilité d'avoir 1 fille et 1 garçon ?

Exercice 37

Démontrer la formule de Pascal

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad \text{que l'on peut aussi écrire sous la forme} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Exercice 38

Montrer les égalités suivantes :

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

$$1C_n^0 + 2C_n^1 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^n kC_n^k = n2^{n-1}$$

Exercice 39

On considère une urne contenant 12 boules identiques à la couleur près. 5 d'entre-elles sont rouges (R), 4 sont bleues (B) et 3 sont jaunes (J). On tire au hasard une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne. On répète ce tirage 6 fois. Quelle est la probabilité pour que, parmi les 6 boules que l'on a tirées, il y en ait 3 de couleur rouge, 2 de couleur bleue et 1 de couleur jaune (3R,2B,1J) ?

Exercice 40

On considère une famille ayant 3 enfants. Sachant que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille, calculer la probabilité pour que cette famille n'ait pas de garçon, 1 garçon, 2 garçons et 3 garçons.

Exercice 41

500 étudiants sont inscrits à la fac pour les matières Mathématiques (M), Physique (P) et Chimie (C). On a les données suivantes :

Nombre d'étudiants qui font des mathématiques : 300

Nombre d'étudiants qui font de la physique : 250

Nombre d'étudiants qui font de la chimie : 200

Nombre d'étudiants qui font des mathématiques et de la physique : 110

Nombre d'étudiants qui font de la physique et de la chimie : 130

Nombre d'étudiants qui font des mathématiques et de la chimie : 30

1. Calculer le nombre d'étudiants qui font les 3 matières MPC ?

2. Calculer le nombre d'étudiants qui ne font que 2 matières MP, MC et PC à l'exclusion de la troisième. Il y a 3 valeurs à calculer.

Exercice 42

On considère un jeu de 52 cartes et une donne de 5 cartes (poker).

1. Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir 4 as ?

3. La probabilité d'avoir 3 as et deux rois ?
4. La probabilité d'avoir la suite 10-valet-dame-roi-as dans n'importe quel ordre ?
5. La probabilité de n'avoir aucun as ?
6. La probabilité d'avoir au moins 1 as ?

Exercice 43

Vous passez un QCM de 5 questions. Pour chaque question 3 réponses sont possibles mais une seule est juste. Si vous répondez au hasard à ce QCM :

1. Quel est le nombre de réponses possibles ?
2. Quelle est la probabilité pour que toutes les réponses soient fausses ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une réponse soit juste ? Que tout le QCM soit juste ?

Exercice 44

On considère une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. On tire successivement 3 boules. À chaque tirage on note la couleur de la boule obtenue et on la remet dans l'urne pour le prochain tirage.

1. Quelle est la probabilité de ne tirer aucune boule noire
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?
3. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules noires ?
4. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules noires ?

Exercice 45

Des voitures sont fabriquées dans 3 usines différentes : A_1 , A_2 et A_3 . La production selon l'usine est la suivante : $A_1 = 35\%$, $A_2 = 46\%$ et $A_3 = 19\%$.

La probabilité pour qu'une voiture soit défectueuse n'est pas pour toutes les usines. Elle est de 0,004 pour l'usine A_1 , de 0,02 pour l'usine A_2 et de 0,01 pour l'usine A_3 .

1. Calculer la probabilité pour qu'une voiture défectueuse sorte de l'usine A_1 , A_2 et A_3 .
2. Quelle est la probabilité pour qu'une voiture défectueuse ne sorte pas de l'usine A_1 .

Exercice 46

1000 étudiants passent un concours. 600 sont considérés comme de bons étudiants par les professeurs et 400 comme de mauvais étudiants car ils n'ont pas beaucoup travaillé et ont de grosses lacunes. Les statistiques des années précédentes indiquent que la

probabilité qu'un bon étudiant réussisse est de 20% alors qu'un mauvais étudiant n'a que 1% de chance de réussir.

1. Quelle est la probabilité pour un étudiant pris au hasard de réussir le concours ?
2. Pour un étudiant ayant été reçu au concours, quelle est la probabilité pour qu'il ait été classé initialement comme un bon étudiant et celle qu'il ait été considéré comme un mauvais étudiant ?

Exercice 47

On considère deux urnes I et II. On peut tirer dans chaque urne avec la même probabilité. Dans l'urne I il y a 7 boules blanches et 3 boules noires. Dans l'urne II il y a 2 boules blanches et 4 boules noires. Une fois l'urne choisie, on tire une boule au hasard et on obtient une boule blanche. Quelle est la probabilité pour que cette boule vienne de l'urne I ?

Exercice 48

On dispose de 12 livres : 5 en mathématiques, 4 en physique et 3 en chimie. On veut les disposer sur une étagère de la bibliothèque en les regroupant par familles (mathématiques, physique et chimie). Combien y a-t-il de manières possibles de le faire ?

Exercice 49

On tire 10 cartes d'un jeu de 52 cartes. 4 sont des cœurs, 3 sont des piques, 2 sont des carreaux et une est un trèfle. Combien y a-t-il de configurations différentes possibles ?

Exercice 50

On considère un groupe de 7 hommes et de 5 femmes. On souhaite faire un comité contenant 3 hommes et 2 femmes. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 51

On considère 22 jeunes avec lesquels on va constituer 2 équipes de football de 11 joueurs. Combien y a-t-il de manières de les répartir s'ils sont tous équivalents pour ce jeu ?

Exercice 52

On considère le jeu de poker dans lequel chaque joueur a 5 cartes. On considère le jeu suivant dans lequel on a 3 cartes de même rang et 2 cartes de même valeur mais différentes (full). Quelle est la probabilité d'obtenir un full lors de la distribution des cartes ?

6. Information

Exercice 53