On considère le jeu de poker dans lequel chaque joueur a 5 cartes. On considère le jeu suivant dans lequel on a 3 cartes de même rang et 2 cartes de même valeur mais différentes (full). Quelle est la probabilité d'obtenir un full lors de la distribution des cartes ?

6. Information

Exercice 53

Si deux évènements A et B ne sont pas indépendants ($p(A,B) \neq P(A)p(B)$), calculer l'information $I(A,B)$.

Exercice 54

On considère le jeu de 421 dans lequel on lance 3 dés. On gagne si l'on tire un 4, un 2 et un 1 dans n'importe quel ordre.

1. Calculer la probabilité de faire 421

2. Calculer l'entropie de la source

Exercice 55

On a une urne avec des boules identiques numérotées de 1 à 8 mais en nombre différent si bien que la probabilité de tirer une boule avec un chiffre donné dépend de celui-ci. On a la distribution de probabilité suivante selon la valeur tirée :

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	1/2	1/64	1/8	1/64	1/4	1/64	1/16	1/64

Calculer l'entropie associée à ces évènements.

Exercice 56

1. Exprimer, en binaire, les nombres décimaux suivants : 25 ; 109 ; 25,625 et 10,6.

2. Calculer la valeur décimale des nombres binaires suivants : 101011 et 101,11

Exercice 57

Soit n un nombre décimal. Le complément à 9 de n est obtenu en soustrayant 9 (ou en complétant à 9) chacun des chiffres de n. Le complément à 10 du nombre n est obtenu en ajoutant 1 au complément à 9.

1. Calculer le complément à 9 et à 10 des nombres 5403 et 2724

2. Effectuer la soustraction 5403-2724 à la main. Combien de retenues a-t-il fallu faire au cours de cette opération ?

3. Vérifier que l'on peut effectuer cette soustraction en ajoutant 5403 au complément à 9 de 2724 avec une petite manipulation supplémentaire que l'on précisera. Quelle procédure faudrait-il adopter si l'on utilisait le complément à 10 ?

4. Appliquer la méthode du complément à 9 pour la soustraction 4021-123

5. Pour les nombres binaires, on parle de complément à 1 et à 2. Quels est sont les compléments à 1 et 2 de 101101 ? Quelle est la table d'addition et de soustraction ? Calculer, selon le schéma indiqué plus haut (soustraction normale, complément à 9 et à 10), la soustraction 111000-101101.

Exercice 58

On considère une source d'information qui veut émettre 4 signaux, *A, B, C et D* avec la distribution de probabilité suivante :

	A	*B*	*C*	*D*
Probabilité	0,5	0,25	0,125	0,125

1. On code ces symboles en binaire selon la table indiquée ci-dessous.

	A	*B*	*C*	*D*
Codage binaire	0	10	110	111

Ce code est-il non-ambigu ?

2. Quelle est l'entropie de la source ?

3 Coder le message : *ACDBAB*

4. Décoder la séquence 10001101110100

5. Quel est le graphe représentant le codage utilisé

Exercice 59

1. Quelle est la valeur en octal et en hexadécimal des nombres suivants : 8, 16, 250 ?

2. Quelle est la valeur en décimal du nombre octal 77 et de 7777, parfois utilisé comme eof (end-of-file) ?

3. Quelle est la valeur en décimal des nombres hexadécimaux 10 et FFFF (utilisé parfois comme eof) ?

Exercice 60

La table d'addition binaire s'écrit dans un tableau à double entrée :

+	0	1
0	0	1

1	1	10

Écrire, dans un tableau à double entrée, la table d'addition en hexadécimal.

Exercice 61

On se propose de coder des nombres décimaux avec un code DCB (décimal codé binaire) dans lequel on code chaque chiffre décimal par 4 bits. La correspondance entre un chiffre décimal et le code DCB est indiquée dans le tableau ci-dessous. On utilisera le code DCB 8-4-2-1 et le code XS-3.

1. Quelle est la relation entre le code DCB 8-4-2-1 et le code XS-3 ?

2. Coder le nombre 531 en DCB 8-4-2-1 et DCB XS-3

3. Coder le nombre 531 en binaire direct.

Chiffre décimal	Code DCB 8-4-2-1	Code DCB XS-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

Exercice 62

Quel pourrait être le codage de Huffmann de l'ensemble suivant :

Symbole	A	B	C	D	E	F
Probabilité	0,1	0,1	0,25	0,15	0,35	0,05

Exemple tiré de http://cermics.enpc.fr/polys/info1/main/node76.html

Exercice 63

On donne les trois codes suivants :

(a) $\{000, 101, 011\}$
(b) $\{0, 10, 11\}$
(c) $\{1, 01, 11\}$

Dire quels sont les codes qui sont :

- Préfixe à longueur variable
- Non préfixe à longueur variable
- À longueur fixe

Exercice 64

Une variable aléatoire X peut prendre 4 valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$. Les différentes valeurs appa-raissent avec la probabilité $p(X) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.

1. Calculer l'entropie d'information $H(X)$

2. On s'intéresse à l'évènement $E = \{1, 3\}$. Calculer la probabilité d'obtenir cet évènement.

3. Pour l'évènement E, calculer les probabilités d'obtenir $X = 1$ et $X = 3$.

4. Calculer l'entropie conditionnelle $H(X \in E)$.

Exercice 65

On considère un canal binaire symétrique avec les variables aléatoires X en entrée et Y en sortie. Soit ε la probabilité d'erreur de transmission sur un canal. La matrice de transmission est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(Y|x)(0,0) & P(Y|x)(1,0) \\ P(Y|x)(0,1) & P(Y|x)(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

Soit $P_X(0) = p$ et $P_X(1) = 1 - p = q$

1. Calculer $H(X)$

2. Calculer $P_Y(0)$ et $P_Y(1)$

3. Calculer $H(Y|0)$ et $H(Y|1)$

4. Calculer $H(Y|X)$

5. Calculer $H(X,Y)$

Exercice 66

On considère un système à 2 variables, X et Y pouvant prendre chacune 4 valeurs numérotées de 1 à 4. La probabilité $p(x_i, y_j)$ pour $i = 1 \dots 4$ et $j = 1..4$. La matrice de probabilité est supposée la suivante :

X\Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
3	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0
4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0

1. Calculer les probabilités marginales $p(x)$ et $p(y)$
2. Calculer $H(X)$ et $H(Y)$
3. Calculer $H(X,Y)$
4. Calculer $H(X|Y)$ et $H(Y|X)$
5. Calculer $H(X;Y)$
6. Vérifier les calculs avec le diagramme de Venn

7. Cryptographie

Exercice 67

On reçoit le message suivant codé avec le code de César

VL YRXV WUDYDLOOHC ELHQ YRXV DXUHC YRWUH HADPHQ D O HIUHL

Pouvez-vous décoder ce message ? On donne la fréquence d'apparition des lettres en français évaluée dans www.nymphomath.ch/crypto/stat/francais.html

Lettre	Fréquence
A	8.40 %
B	1.06 %
C	3.03 %
D	4.18 %
E	17.26 %
F	1.12 %

Le 22 ! provient du nombre de permutations que l'on peut effectuer avec 22 personnes. Les 11 ! proviennent de ce qu'il n'y a pas d'ordre pour les 11 joueurs. Le 2 ! vient de ce qu'il n'y a pas d'ordre pour les deux équipes.

Solution 52

La probabilité d'obtenir un full est :

$$\frac{13\times 12\times C_4^3\times C_4^2}{C_{52}^5}=0{,}00144$$

C_{52}^5 est le nombre de mains différentes que l'on peut obtenir lors du tirage de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Il y a 4 cartes d'un rang donné (4 as, 4 rois, etc.). Pour choisir un brelan (3 cartes de même rang) ou une paire (2 cartes de même rang) on a C_4^3 et C_4^2 possibilités pour un rang donné. Pour choisir le brelan on a le choix entre 13 possibilités et pour la paire entre 12 possibilités puisque le rang des cartes du brelan et de la paire doivent être différents.

6. Information

Solution 53

$$I(A,B)=-\ln_2 p(A,B)=-\ln_2\left[p(A)p(B|A)\right]=-\ln_2 p(A)-\ln_2 p(B|A)=I(A)+I\left[p(B|A)\right]$$

Où $I\left[p(B|A)\right]$ est l'information conditionnelle définie à partir de la probabilité conditionnelle $p(B|A)$ d'avoir B sachant que A est réalisé.

Solution 54

1. La probabilité de tirer un 4, un 2 et un 1 est de $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. On peut tirer cette configuration $3!$ fois. Donc $p(421)=\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 3!=\frac{1}{36}$

2. La probabilité de ne pas tirer 421 est $1-p(421)=\frac{35}{26}$. L'entropie de la source vaut :

$$H=\frac{1}{36}\ln_2 36+\frac{35}{36}\ln_2\left(\frac{36}{35}\right)=0{,}183 \text{ bit}$$

Solution 55

En regroupant les termes, l'entropie $H(X)$ vaut :

$$H(X) = -\frac{1}{2}\ln_2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln_2\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\ln_2\frac{1}{16} - \frac{4}{64}\ln_2\frac{1}{64}$$
$$= \frac{1}{2}\ln_2 2 + \frac{1}{4}\ln_2 4 + \frac{1}{8}\ln_2 8 + \frac{1}{16}\ln_2 16 + \frac{4}{64}\ln_2 64$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{4\times 6}{64} = 2 \text{ bits}$$

Solution 56

1. 25 → 11001 109 → 1101101

25,625 → 11001,101 et 10,6 → 1010,1001 1001 1001.....

Division par 2	Quo-tient	Reste
25/2	12	1
12/2	6	0
6/2	3	0
3/2	1	1
1/2	0	1

On prend les restes du bas vers le haut $\Rightarrow 25_{10} = 11001_2$

Division par 2	Quo-tient	Reste
109/2	54	1
54/2	27	0
27/2	13	1
13/2	6	1
6/2	3	0
3/2	1	1
1/2	0	1

On prend les restes du bas vers le haut $\Rightarrow 109_{10} = 1101101_2$

Pour 25,625, on procède comme ci-dessus pour les chiffres avant la virgule. Pour ceux après la virgule on fait comme ci-dessous.

Multiplication par 2	Partie décimale	Partie entière

0,625×2	0,25	1
0,25×2	0,5	0
0,5×2	0	1

La partie décimale prend la partie entière de haut en bas $\Rightarrow$ $0,625_{10} \ = \ 0{,}101_2$

Donc, au total : $25,625_{10} = 11001,101_2$

Pour le nombre décimal 0,6 il n'y a pas convergence (comme dans 1/3, par exemple)

Multiplication par 2	Partie décimale	Partie entière
0,6×2	0,2	1
0,2×2	0,4	0
0,4×2	0,8	0
0,8×2	0,6	1
0,6×2	0,2	1
etc.		

Donc $0,6_{10} = 0{,}1001\ 1001\ 1001...$ et $10,6_{10} = 1010{,}1001\ 1001\ 1001...$

2. $101011 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = 43$

$101,11 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} = 5,75$

Solution 57

1. Les compléments à 9 et 10 de 5403 sont 4596 et 4597, respectivement. Ceux de 2724 sont 7275 et 7276.

2. 5403-2724=2679. Il a fallu faire 3 retenues

3. On procède selon le schéma ci-dessous et l'on voit qu'il n'y a qu'une seule retenue et l'on ajoute le 1 aux 4 premiers chiffres trouvés.

Soustraction normale	Complément à 9	Complément à 10
5403	5403	5403
- 2724	+ 7275	+ 7276
2679	1 2678	1 2679
	+ 1	
	2679	

4. Le complément à 9 de 123 avec 4 digits est 9876. On effectue l'addition 4021+9876 et l'on ajoute la dernière (1) retenue au résultat de l'addition selon le schéma indiqué sur la figure.

5. Pour calculer le complément à 1, on change les 0 en 1 et vice versa. Le complément de 101101 est 010010. Le complément à 2 s'obtient en ajoutant 1 au résultat précédant. Il vaut 010011

La table de soustraction est :

Addition	
0+0 =	0
1+0 =	1
0+1 =	1
1-1 =	1 avec une retenue de 1 dans la colonne suivante

Soustraction	
0-0 =	0
1-0 =	1
1-1 =	0
0-1 =	1 avec une retenue de 1 dans la colonne suivante

On trouve 1011 pour la soustraction. On constate que la façon la plus simple de faire cette soustraction est d'utiliser le complément à 1. En décimal il s'agit de l'opération 56-45=11.

Solution 58

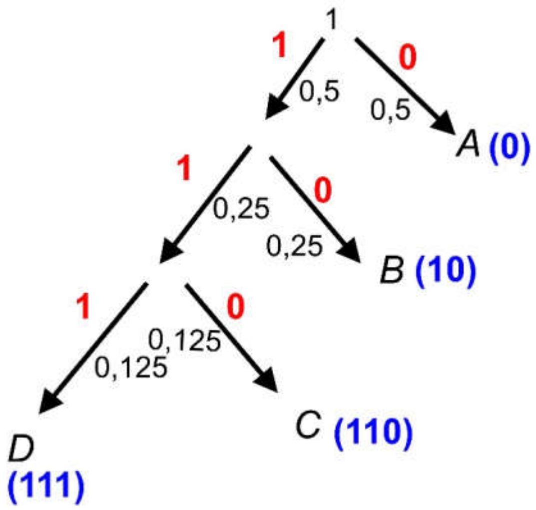
1. Le code est non-ambigu car il est sans préfixe (aucun mot n'a pour préfixe un autre mot)

2. L'entropie de la source vaut :

$$H = -\sum_i p_i \log_2 p_i = -0,5\log_2 0,5 - 0,25\log_2 0,25 - 0,125\log_2 0,125 - 0,125\log_2 0,125 = 1,75 \text{ bit}$$

3. 011011110010

4. BAACDABA

5. 

Solution 59

1. $8_{10} = 10_8$ car $8 = 0\times 8^0 + 1\times 8^1$
$16_{10} = 20_8$ car $16 = 0\times 8^0 + 2\times 8^1$
$250_{10} = 372_8$ car $250 = 2\times 8^0 + 7\times 8^1 + 3\times 8^2$

Faisons, pour le dernier des divisions successives par 8 comme on l'avait fait pour passer aux nombres binaires.

	Partie entière	Reste
250/8	31	2
31/8	3	7
3/8	0	3

Le résultat est obtenu à partir des restes en lisant de bas en haut : 372

Pour l'hexadécimal on a :

$8_{10} = 8_{16}$ car $8 = 8\times 16^0$
$16_{10} = 10_8$ car $16 = 0\times 16^0 + 1\times 16^1$
$250_{10} = FA_{16}$ car $250 = 10\times 16^0 + 15\times 16^1$

Par division successives cela donnerait pour le nombre 250 :

	Partie entière	Reste
250/16	15	10 (A)
15/16	0	15 (F)

D’où le résultat FA.

2. $77_8 = 63_{10}$ car $77=7\times 8^0 + 7\times 8^1$
$7777_8 = 4095_{10}$ car $7777=7\times 8^0 + 7\times 8^1 + 7\times 8^2 + 7\times 8^3$

3. $10_{16} = 16_{10}$ car $10=0\times 16^0 + 1\times 16^1$
$FFFF_{16} = 65535_{10}$ car $FFFF=15\times 16^0 + 15\times 16^1 + 15\times 16^2 + 15\times 16^3$

Solution 60

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1F

Solution 61

1. le code DCB XS-3 se déduit du code DCB 8-4-2-1 en ajoutant 3=0011 (en binaire)

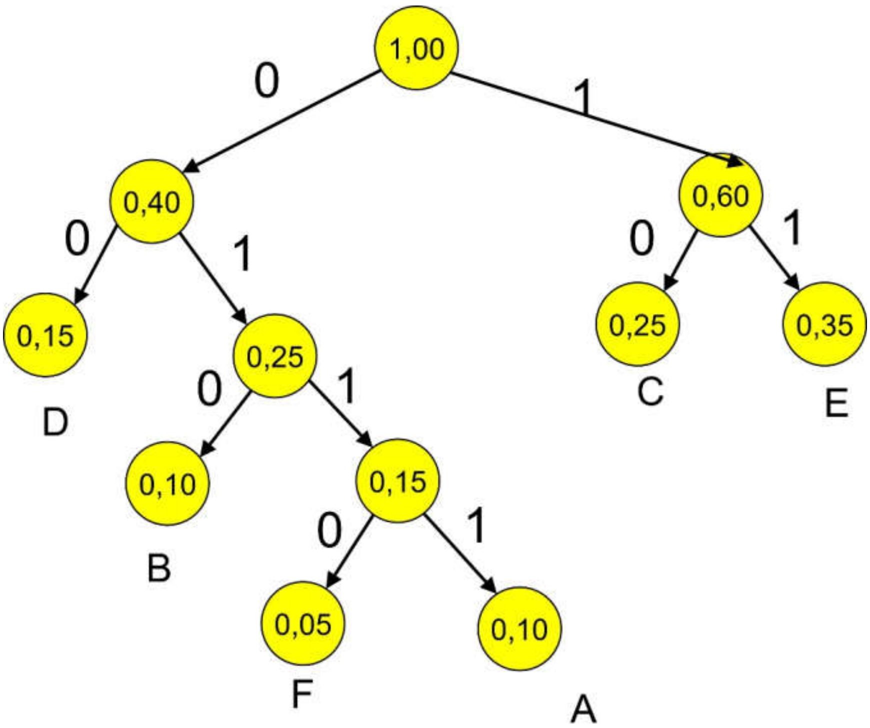
2. 531 $\Rightarrow$ 0101 0011 0001 en DCB 8-4-2-1

531 $\Rightarrow$ 1000 0110 0100 en DCB XS-3

3. $531_{10} = 1000010011_2$

Solution 62

Une solution possible est indiquée dans la figure



Les codes obtenus sont les suivants :

Symbole	A	B	C	D	E	F
Code	0111	010	10	00	11	0110

Solution 63

(a) $\{000, 101, 011\}$ $\Rightarrow$ code de longueur fixe

(b) $\{0, 10, 11\}$ $\Rightarrow$ code préfixe de longueur variable

(c) $\{1, 01, 11\}$ $\Rightarrow$ code non préfixe de longueur variable

Solution 64

1. $H(X)=-\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log_2 p(x_i)=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{2}{8}\log_2 8=\frac{7}{4}$ bits

2. $p(X\in E)=0{,}5+0{,}125=\frac{5}{8}$

3. $p_E(X=1)=0{,}8$ et $p_E(X=3)=0{,}2$

4. $H(X\in E)=-p_E(X=1)\log_2 p_E(X=1)--p_E(X=3)\log_2 p_E(X=3)$
$=-0{,}8\log_2 0{,}8-0{,}2\log_2 0{,}2=0{,}7219$ bit

Solution 65

1. $H(X)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$

2. $P_Y(0)=P_X(0)p(Y|X)(0,0)+P_X(1)p(Y|X)(0,1)=(1-\varepsilon)p+\varepsilon(1-p)$
$P_Y(1)=P_X(0)p(Y|X)(1,0)+P_X(1)p(Y|X)(1,1)=\varepsilon p+(1-\varepsilon)(1-p)$

3. $H(Y|0)=-P(Y|X)(0,0)\log_2 P(Y|X)(0,0)-P(Y|X)(1,0)\log_2 P(Y|X)(1,0)$
$=-(1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)-\varepsilon\log_2\varepsilon$

$H(Y|1)=-P(Y|X)(0,1)\log_2 P(Y|X)(0,1)-P(Y|X)(1,1)\log_2 P(Y|X)(1,1)$
$=-\varepsilon\log_2\varepsilon-(1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)=H(Y|0)$

4. $H(Y|X)=P_X(0)H(Y|0)+P_X(1)H(Y|1)=pH(Y|0)+(1-p)H(Y|0)$
$=H(Y|0)=H(Y1)$

5. $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$
$=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)-\varepsilon\log_2\varepsilon-(1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)$

Solution 66

1. Les probabilités marginales sont les suivantes (on somme les colonnes ou les lignes selon la variable à laquelle on s'intéresse.

$p(x)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$ et $p(y)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

2. $H(X)=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 4+2\frac{1}{8}\log_2 8=\frac{7}{4}$ bits

$H(Y)=4\frac{1}{4}\log_2 4=2$ bits

3. $H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j}^{4} p(x_i,y_j)\log_2 p(x_i,y_j)$

$$H(X,Y)=\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{2}{8}\log_2 8+\frac{6}{16}\log_2 16+\frac{4}{32}\log_2 32=\frac{27}{8}$$

4. $H(X|Y)=\sum_{i=1}^{4}p(y_i)H(X|Y=i)$ et $H(X|Y=i)$ doit être calculé après avoir renormalisé les chiffres pour que la probabilité totale soit égale à 1.

Pour $y_1 \Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$. Donc il faut calculer $H(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8})=\frac{7}{4}$.

Pour $y_2 \Rightarrow \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$. Donc il faut calculer $H(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8})=\frac{7}{4}$.

Pour $y_3 \Rightarrow \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$. Donc il faut calculer $H(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=2$.

Pour $y_4 \Rightarrow \frac{1}{4}+0+0+0=\frac{1}{4}$. Donc il faut calculer $H(1,0,0,0)=0$.

Au total :

$$H(X|Y)=\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4}\times 0=\frac{11}{8}$$

$$H(Y|X)=\frac{1}{2}H(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2})+\frac{1}{4}H(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},0)+\frac{1}{8}H(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)+\frac{1}{8}H(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},0)$$

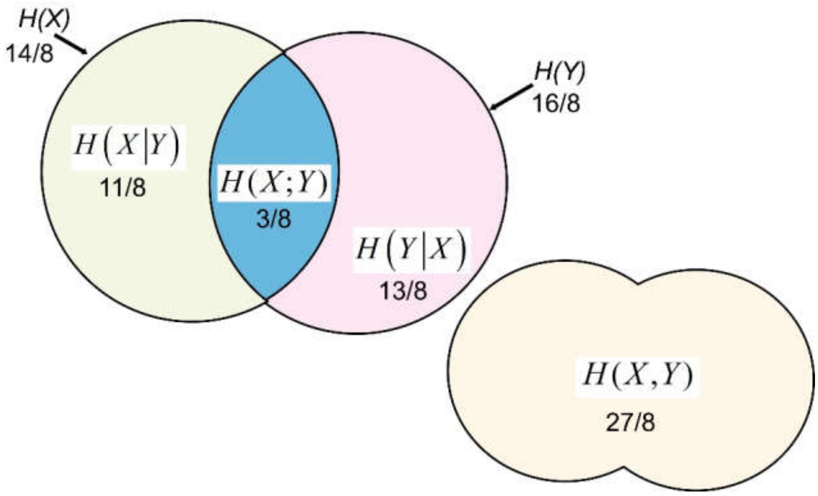
$$H(X|Y)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{13}{8}$$

5. $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y)$

$$\frac{27}{8}=\frac{7}{4}+\frac{13}{8}=2+\frac{11}{8}$$

6. $H(X;Y)=I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)=\frac{7}{4}+2-\frac{27}{8}=\frac{3}{8}$

7.



7. Cryptographie

Solution 67

La lettre qui apparaît le plus souvent est le H. c'est sans doute un E. Il s'agit donc d'un code de César avec un décalage de 3. La table de correspondance est :

Lettre	Codage
A	D
B	E
C	F
D	G
E	H
F	I
G	J
H	K
I	L
J	M
K	N
L	O
M	P
N	Q
O	R
P	S
Q	T
R	U
S	V
T	W
U	X
V	Y
W	Z